Блок 3

Пусть C – бинарный код длины 15, порожденный многочленом $g(x) = x^4 + \mathrm{x}^3 + 1$. Декодировать вектор $\bar{y} = (100000110101100)$.

Решение.

$x^{15} - 1 = (x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ – Произведение всех неприводимых над F_2 многочленов степеней, делящих 4 (по известной теореме).

Тогда проверочный многочлен $h(x)$ кода C равен $(x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = (x^3+1)(\mathrm{x}^8+\mathrm{x}^7+\mathrm{x}^6+\mathrm{x}^4+1) = \mathrm{x}^{11}+\mathrm{x}^{10}+\mathrm{x}^9+\mathrm{x}^8+\mathrm{x}^6+\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^3+1$

Поэтому проверочная матрица H равна
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Видно, что все столбцы H образуют двоичные записи десятичных чисел от 1 до 15. Значит C – код, эквивалентный бинарному коду Хэмминга длины 15.

Находим синдром $\mathrm{S}(\bar{y}) = \mathrm{H}\bar{y}^t = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ – второй столбец матрицы H. Следовательно, ошибка во второй позиции вектора $\bar{y}$ и, значит, $\bar{y}$ декодируется в (110000110101100).

Ответ: (110000110101100).

Критерии оценивания: (всего 50 баллов)

Найден проверочный многочлен $h(x)$ – 16 баллов;
найдена проверочная матрица H –16 баллов;
найден синдром $\mathrm{S}(\bar{y})$ – 10 баллов;
найден декодированный вектор – 8 баллов.